به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۲

استقلال خطی، پایه، بعد و فضای برداری | **تمرین دوم** | تاریخ انتشار: ۶ آبان ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات تئوری (۱۰۰ + ۲۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۹ آبان ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۱۰ نمره) فرض کنید بردارهای v_1, v_2, v_3, v_4 در فضای V مستقل خطی هستند. ثابت کنید بردارهای زیر نیز مستقل خطی هستند:

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

پاسخ فرض کنید مقادیر x, y, z, w در فیلد وجود دارند، به‌طوری که:

$$x(v_1 - v_2) + y(v_2 - v_3) + z(v_3 - v_4) + wv_4 = 0$$

آن‌گاه:

$$xv_1 + (y - x)v_2 + (z - y)v_3 + (w - z)v_4 = 0$$

از آن‌جایی که v_1, v_2, v_3, v_4 در V مستقل خطی هستند، نتیجه می‌شود:

$$x = 0,\ y - x = 0,\ z - y = 0,\ w - z = 0$$

که یعنی $x = y = z = w = 0$ که استقلال خطی بردارهای خواسته‌شده‌ی سوال را نتیجه می‌دهد و حکم اثبات می‌شود.

پرسش ۲ (۲۰ نمره) فرض کنید V یک فضای برداری متناهی بر روی اعداد حقیقی باشد. همچنین به‌ازای $m \geq 2$، مجموعه‌ی بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ در فضای V قرار دارند، به‌طوری که $\alpha_m \neq 0$. ثابت کنید بردارهای

$$\beta_1 = \alpha_1 + k_1\alpha_m,\ \beta_2 = \alpha_2 + k_2\alpha_m,\ \dots\ , \beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + k_{m-1}\alpha_m$$

به‌ازای تمام مقادیر $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ مستقل خطی هستند، اگر و فقط اگر بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ متسقل خطی باشند.

پاسخ فرض کنید برای هر $k_1, \dots, k_{m-1}$، بردارهای $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ مستقل خطی باشند. اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ وابسته‌ی خطی باشند، آن‌گاه می‌توان α_m را به شکل ترکیب خطی‌ای از $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ نشان داد. پس $c_1, \dots, c_{m-1}$ وجود دارند که:

$$\alpha_m = c_1\alpha_1 + \cdots + c_{m-1}\alpha_{m-1}$$

چون $\alpha_m \neq 0$، پس همه‌ی $c_1, \dots, c_{m-1}$ نمی‌توانند همزمان صفر باشند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $c_1 \neq 0$. بنابراین اگر قرار دهیم:

$$k_1 = -\frac{1}{c_1},\ \ k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0$$

نتیجه می‌دهد که $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ وابسته‌ی خطی هستند. زیرا $\beta_1 = \alpha_1 - \frac{1}{c_1}\alpha_m$ یک ترکیب خطی از $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ و بنابراین یک ترکیب خطی از $\beta_2, \dots, \beta_{m-1}$ است که با فرض در تناقض است. بنابراین $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ باید مستقل خطی باشند.

از سوی دیگر فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ مستقل خطی باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ مستقل خطی هستند. فرض کنید $l_1, \dots l_{m-1}$ وجود داشته باشند، به‌طوری که:

$$l_1\beta_1 + \cdots + l_{m-1}\beta_{m-1} = 0$$

با قرار دادن $\beta_i = \alpha_i + k_i\alpha_m \forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ داریم:

$$l_1\alpha_1 + \cdots + l_{m-1}\alpha_{m-1} + (l_1k_1 + \cdots + l_{m-1}k_{m-1})\alpha_m = 0$$

چون $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ مستقل خطی هستند، نتیجه می‌شود:

$$l_1 = \cdots = l_{m-1} = 0, \quad l_1 k_1 + \cdots + l_{m-1} k_{m-1} = 0$$

پس $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ مستقل خطی هستند.

بنابراین حکم کلی اثبات می‌شود.

پرسش ۳ (۱۰ نمره) فضای برداری زیر را در نظر بگیرید و خواص گفته شده را برای آن اثبات کنید:

Set: $C = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$

جمع برداری: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$

ضرب اسکالر: $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1)$

(آ) (۲ نمره)

Zero vector is: $\mathbf{0} = (-1, -1)$!

(ب) (۸ نمره)

$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ (دقت کنید u, v بردار و α عدد اسکالر هستند.)

پاسخ

(آ) (۲ نمره)

فرض کنید vector zero برابر با بردار (c_1, c_2) باشد، آنگاه برای هر بردار دلخواه (x_1, x_2) خواهیم‌داشت:

$$\begin{aligned}
(c_1, c_2) + (x_1, x_2) &= (x_1, x_2) \\
(c_1 + x_1 + 1, c_2 + x_2 + 1)&(x_1, x_2) \\
c_1 + 1 = 0 \quad &, c_2 + 1 = 0 \\
c_1 = -1 \quad &, c_2 = -1 \\
(c_1, c_2) &= (-1, -1)
\end{aligned}$$

پس vector zero برابر با $(-1, -1)$ خواهد بود.

(ب) (۸ نمره)

$\alpha(u+v) = \alpha((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = \alpha(u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1) = (\alpha(u_1 + v_1 + 1) + \alpha - 1, \alpha(u_2 + v_2 + 1) + \alpha - 1) = ((\alpha u_1 + \alpha - 1) + (\alpha v_1 + \alpha - 1) + 1, (\alpha u_2 + \alpha - 1) + (\alpha v_2 + \alpha - 1) + 1) = (\alpha u_1 + \alpha - 1, \alpha u_2 + \alpha - 1) + (\alpha v_1 + \alpha - 1, \alpha v_2 + \alpha - 1) = \alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2) = \alpha u + \alpha v$

پرسش ۴ (۲۰ نمره) فرض کنید u, v, w سه بردار یکه در فضای ضرب داخلی حقیقی V باشند.

(آ) (۱۵ نمره) ثابت کنید:

$$2\langle u, v\rangle\langle u, w\rangle\langle v, w\rangle \geq \langle u, v\rangle^2 + \langle u, w\rangle^2 + \langle v, w\rangle^2 - 1$$

راهنمایی: اولین مرحله از روش Gram–Schmidt را روی بردارهای v و w نسبت به بردار u پیاده کنید. سپس از نامساوی کوشی‌ـ‌شوارتز روی جفت بردارهای به‌دست آمده استفاده کنید.

(ب) (۵ نمره) ثابت کنید در نامساوی قسمت قبل، حالت تساوی رخ می‌دهد، اگر و فقط اگر بردارهای u, v, w وابسته خطی باشند.

پاسخ

(آ) نامساوی کوشی‌ـ‌شوارتز را روی بردارهای $v - \langle u, v\rangle u$ و $w - \langle u, w\rangle u$ اعمال می‌کنیم:

$$\langle v - \langle u, v\rangle u, w - \langle u, w\rangle u\rangle^2 \leq \|\langle v - \langle u, v\rangle u\|^2 \|w - \langle u, w\rangle u\|^2$$

ضرب داخلی سمت چپ نامساوی را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
\langle v - \langle u, v\rangle u, w - \langle u, w\rangle u\rangle &= \langle v, w\rangle - \langle u, v\rangle\langle u, w\rangle - \langle u, w\rangle\langle v, u\rangle + \langle u, v\rangle\langle u, w\rangle \\
&= \langle v, w\rangle - \langle u, v\rangle\langle u, w\rangle
\end{aligned}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\|\langle v - \langle u, v\rangle u\|^2 &= \langle v - \langle u, v\rangle u, v - \langle u, v\rangle u\rangle = \langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle\langle u, v\rangle \\
&= 1 - \langle u, v\rangle^2
\end{aligned}$$

به‌طور مشابه:

$$\|w - \langle u, w\rangle u\|^2 = 1 - \langle u, w\rangle^2$$

بنابراین در کل از نامساوی کوشی‌ـ‌شوارتز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&(\langle v, w\rangle - \langle u, v\rangle\langle u, w\rangle)^2 \leq (1 - \langle u, v\rangle^2)(1 - \langle u, w\rangle^2) \\
&\Rightarrow \langle v, w\rangle^2 - 2\langle v, w\rangle\langle u, v\rangle\langle u, w\rangle + \langle u, v\rangle^2\langle u, w\rangle^2 \leq 1 - \langle u, v\rangle^2 - \langle u, w\rangle^2 + \langle u, v\rangle^2\langle u, w\rangle^2
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$۲\langle u,w\rangle\langle u,w\rangle\langle v,w\rangle \geq \langle u,v\rangle^۲ + \langle u,w\rangle^۲ + \langle v,w\rangle^۲ - ۱$$

و حکم سوال اثبات می‌شود.

(ب) حالت تساوی نامساوی کوشی‌ـ‌شوارتز رخ می‌دهد، اگر و فقط اگر دو بردار وابسته‌ی خطی باشند. پس بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توان گفت:

$$\exists\alpha \in \mathbb{R} : v - \langle u,v\rangle u = \alpha(w - \langle u,w\rangle u)$$

بنابراین حالت تساوی رخ می‌دهد، اگر و فقط اگر:

$$v = (\langle u,v\rangle - \alpha\langle u,w\rangle)u + \alpha w$$

که وابستگی خطی را اثبات می‌کند.

پرسش ۵ (۲۰ نمره) فرض کنید $U_۱, U_۲, \ldots U_m$ زیرفضاهایی با بعد متناهی از V باشند، به‌طوری که $U_۱ + \ldots U_m$، **Direct Sum** باشد. اثبات کنید بعد $U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m$ متناهی است و :

$$dim\ (U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m) = dimU_۱ + \cdots + dimU_m$$

پاسخ از آن‌جا که $U_۱ + \ldots U_m$، Direct Sum است، پس داریم $U_۱ + \ldots U_m = U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m$؛ بنابراین برای اثبات متناهی بودن بعد $U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m$، کافی است نشان دهیم بعد $U_۱ + \ldots U_m$ متناهی است. چون می‌دانیم بعد هر کدام از U_i ها متناهی هستند، فرض کنید W_i مجموعه‌ی متناهی‌ای باشد که یک پایه برای U_i است. بر اساس تعریف Direct Sum $W_۱ \cup \cdots \cup W_m$ حتما $U_۱ + \ldots U_m$ را اسپن خواهدکرد. حالا چون می‌دانیم $dim(U_۱ + \ldots U_m) \leq dimU_۱ + \cdots + dimU_m$، پس حتما بعد $U_۱ + \ldots U_m$ و در نتیجه بعد $U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m$ متناهی است.
حالا با استفاده از استقرا روی m نشان می‌دهیم $dim(U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m) = dimU_۱ + \cdots + dimU_m$.

- برای حالت پایه فرض کنید $m = ۲$. چون $U_۱ + U_۲$ Direct Sum است، می‌دانیم $U_۱ \cap U_۲ = ۰$. پس داریم:

$$dim(U_۱ + U_۲) = dimU_۱ + dimU_۲ - dim(U_۱ \cap U_۲) = dimU_۱ + dimU_۲$$

.

- حالا فرض کنید تساوی برای حالت $m - ۱$ برقرار است و می‌خواهیم آن را برای m نشان دهیم. چون $U_۱ + \ldots U_m$ Direct Sum است، پس تنها راه نوشتن ۰ به صورت $u_۱ + \ldots u_m$ که هر $u_i \in U_i$، این است که $u_i = ۰$. بنابراین تنها راه نوشتن ۰ به صورت $u_۱ + \ldots u_{m-۱}$ که هر $u_i \in U_i$، این است که $u_i = ۰$. بنابراین از آن‌جا که $u_۱ + \ldots u_{m-۱}$ هم Direct Sum است، بر اساس فرض استقرا می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$dim(U_۱ \oplus \cdots \oplus U_{m-۱}) = dimU_۱ + \cdots + dimU_{m-۱}$$

از سوی دیگر فرض کنید $V = U_۱ \oplus \cdots \oplus U_{m-۱}$، پس $U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m = V + U_m$. حالا فرض کنید $x + y = ۰$ به طوری که $x = x_۱ + \cdots + x_{m-۱} \in V$، $x_i \in U_i$، و $y \in U_m$. خواهیم‌داشت $x_i = y = ۰$. پس $V + U_m$ Direct Sum است و به کمک فرض استقرا داریم:

$$dim(U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m) = dim(V + U_m) = dimV + dimU_m = dimU_۱ + \cdots + dimU_{m-۱} + dimU_m = dimU_۱ + \cdots + dimU_m$$

پرسش ۶ (۲۰ نمره) فرض کنید U, W زیرفضاهایی از فضای برداری V با ابعاد متناهی باشد.

(آ) (۱۰ نمره) نشان دهید:

$$dim(U \cap W) = dimU + dimW - dim(U + W).$$

(ب) (۱۰ نمره) قرار دهید: $n = dimV$. اکنون نشان دهید اگر $k < n$، آنگاه همواره یک اشتراک از k زیرفضای با بعد $n - ۱$ وجود دارد که دارای بعد حداقل $n - k$ است.

پاسخ

(آ) فرض کنید $\{x_۱, \ldots, x_k\}$ پایه‌ای برای $W \cap U$ باشد. به‌طور جداگانه آن را به پایه‌های $\{x_۱, \ldots, x_k, u_۱, \ldots, u_l\}$ از U و $\{x_۱, \ldots, x_k, w_۱, \ldots, w_m\}$ از W گسترش می‌دهیم. سپس خواهیم داشت

$$\dim U \cap W = k, \dim U \qquad = k + l, \dim W = k + m$$

حال کافیست ثابت کنیم: $\dim(U + W) = k + l + m$. برای این کار، نشان می‌دهیم که تمامی بردارهای زیر با یکدیگر پایه‌ای برای $U + W$ تشکیل می‌دهند.

$$\{x_۱, \ldots, x_k, u_۱, \ldots, u_l, w_۱, \ldots, w_m\}$$

فرض کنید $Y \in U + W$ برقرار باشد. سپس Y را می‌توان به‌صورت $u + w$ نوشت، به‌این شکل که $u \in U$ و $w \in W$. از آنجایی که u را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی‌ای از $\{x_۱, \ldots, x_k, u_۱, \ldots, u_l\}$ و w را به‌صورت ترکیب خطی‌ای از $\{x_۱, \ldots, x_k, w_۱, \ldots, w_m\}$ نوشت، می‌توان نتیجه گرفت که $\{x_۱, \ldots, x_k, u_۱, \ldots, u_l, w_۱, \ldots, w_m\}$ فضای $U + W$ را span می‌کند.

فرض کنید متغیر های $\alpha_۱, \ldots, \alpha_k$، $\beta_۱, \ldots, \beta_l$، $\gamma_۱, \ldots, \gamma_m$ را داریم به‌گونه‌ای که

$$\alpha_۱ x_۱ + \ldots + \alpha_k x_k + \beta_۱ u_۱ + \ldots + \beta_l u_l + \gamma_۱ w_۱ + \ldots + \gamma_m w_m = ۰.$$

درنظر داشته باشید که $w := \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_m w_m = -(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_l u_l) \in U$
همچنین مشخص است که $w \in W$ درنتیجه $w \in U \cap W$ پس اسکالرهای $\mu_1, \ldots, \mu_k$ وجود دارند به‌گونه ای که

$$w = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_k x_k.$$

و درنتیجه

$$\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_m w_m - \mu_1 x_1 - \ldots - \mu_k x_k = 0.$$

از آن‌جا که $\{w_1, \ldots, w_m, x_1, \ldots, x_k\}$ به‌صورت خطی مستقل می‌باشد، $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \mu_1, \ldots, \mu_k$ همگی صفر می‌باشند. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ نیز همگی صفر می‌باشند. پس

$$\{x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_l, w_1, \ldots, w_m\}$$

مجموعه ای مستقل خطی است و درنتیجه پایه‌ای برای $U + W$ ایجاد می‌کند.

(ب) با استفاده از استقرا اثبات را انجام می‌دهیم.
اگر $k = 1$ باشد، پاسخ بدیهی است. فرض کنید موضوع برای عددی مانند $k \geq 1$ برقرار است. سپس فرض کنید $V_1, \ldots, V_k, V_{k+1}$ زیرفضاهایی از V با $n - 1$ بعد باشند. سپس داریم:

$$\begin{aligned}\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} V_i\right) &= \dim\left(V_{k+1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i\right)\right) \\ &= \dim V_{k+1} + \dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} V_k\right) - \dim\left(V_{k+1} + \bigcap_{i=1}^{k} V_i\right)\end{aligned}$$

درنظر داشته باشید $\dim\left(V_{k+1} + \bigcap_{i=1}^{k} V_i\right)$ دارای حداکثر n بعد، V_{k+1} دارای $n - 1$ بعد و طبق فرض استقرا، $\bigcap_{i=1}^{k} V_i$ دارای حداقل $n - k$ بعد می‌باشند. درنتیجه

$$\begin{aligned}\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} V_i\right) &\geq n - 1 + n - k - n \\ &= n - (k + 1).\end{aligned}$$

که اثبات را به پایان می‌رساند.

پرسش ۷ (۲۰ نمره) فرض کنید $e_1, \ldots e_n$ پایه‌های یکه متعامد فضای V بوده و $v_1, \ldots v_n$ بردارهایی در V هستند، به‌طوری که به‌ازای هر j:

$$\|e_j - v_j\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ثابت کنید $v_1, \ldots, v_n$ برای V پایه هستند.

پاسخ چون $e_1, \ldots e_n$ یک پایه‌ی یکه متعامد فضای V هستند، پس: $dimV = n$.

اکنون برای این که اثبات کنیم $v_1, \ldots v_n$ یک پایه‌ی فضای V است، کافیست ثابت کنیم $v_1, \ldots v_n$ مستقل خطی هستند. که این را با برهان خلف نشان می‌دهیم.

فرض کنید $v_1, \ldots v_n$ وابسته‌ی خطی باشند. بنابراین وجود دارد $a_1, \ldots a_n$ که برای بعضی $k \in \{1, \ldots n\}$، $a_k \neq 0$ و همچنین داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

اکنون داریم:

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i(e_i - v_i)\Big\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$
\begin{aligned}
\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i(e_i - v_i)\Big\|^2 &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} a_i(e_i - v_i), \sum_{j=1}^{n} a_j(e_j - v_j)\Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Big\langle a_i(e_i - v_i), a_j(e_j - v_j)\Big\rangle \\
&\leq \Big| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Big\langle a_i(e_i - v_i), a_j(e_j - v_j)\Big\rangle \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\Big\langle a_i(e_i - v_i), a_j(e_j - v_j)\Big\rangle| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|a_i(e_i - v_i)\|\|a_j(e_j - v_j)\| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_i||a_j|\|e_i - v_i\|\|e_j - v_j\| \\
by\ assumption\ and\ a_k \neq 0 \quad &< \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}|a_i||a_j| = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\Big)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2
\end{aligned}
$$

$$
\xrightarrow{(1)} \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 < \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2
$$

که با این تناقض، درستی حکم اثبات می‌شود.

سوالات عملی (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۹ آبان ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۵۰ نمره) در این پرسش شما باید برنامه‌ای بنویسید که با دریافت ورودی، مشخص کند که مجموعه بردارهای داده شده نسبت به هم مستقل هستند یا وابسته. در صورتی هم که نسبت به هم مستقلند نوع آن را (خطی یا افاین) مشخص کنید. توجه کنید که باید توابع مرتبط با این سوال توسط شما پیاده سازی شوند و **استفاده از توابع آماده ممنوع است.**

ورودی: در خط اول ورودی، n تعداد بردار های ورودی و m بعد بردارها داده می‌شود. در n خط بعدی نیز بردارهایی m بعدی به شما داده می‌شود.

خروجی: خروجی شما یکی از سه حالت زیر خواهد بود:

```
DEPENDENT
```

```
AFFINELY INDEPENDENT
```

```
LINEARLY INDEPENDENT
```

اگر بردارهای داده شده مستقل خطی بودند لازم به ذکر استقلال افاین آن‌ها نیست.

ورودی نمونه ۱

```
4 2
5 7
4 1
5 8
6 3
```

خروجی نمونه ۱

```
DEPENDENT
```

ورودی نمونه ۲

```
3 2
1 0
0 1
1 1
```

خروجی نمونه ۲

```
AFFINELY INDEPENDENT
```

ورودی نمونه ۳

```
2 2
5 1
3 5
```

خروجی نمونه ۳

```
LINEARLY INDEPENDENT
```

پرسش ۲ (۵۰ نمره) در این پرسش لازم است برنامه‌ای بنویسید تا با گرفتن ورودی، الگوریتم گرام‌ـاشمیت را پیاده سازی و نتیجه را در خروجی بدهد. لازم به ذکر است **استفاده از توابع آماده برای این سوال مجاز نیست** و لازم است تمامی توابع را خودتان پیاده‌سازی کنید.

ورودی: در خط اول ورودی، ابتدا تعداد بردارها (n) و بعد از آن بعد این بردارها (m) داده می‌شود. در n خط بعد هم بردارهایی با بعد m به شما داده می‌شود. تضمین می‌شود که بردارهای داده‌شده مستقل خطی هستند.

خروجی: در خروجی، بردارهای پایه‌ی عمود بر هم را چاپ کنید. (basis orthonormal vectors) نمایش سه رقم اعشار کافی است. ترتیب بردارها هم بدین صورت است که هر برداری که عنصر اول آن بزرگ‌تر بود باید اول چاپ شود (در صورت برابری عناصر اول هم عناصر بعد بردار ها را با هم مقایسه کنید و به همین ترتیب چاپ کنید).

ورودی نمونه ۱

```
3 3
0 3 4
1 0 1
1 1 3
```

خروجی نمونه ۱

```
0.857 -0.412 0.309
0.000 0.600 0.800
-0.514 -0.686 0.514
```